



Cours 26 – 18/12/2024

11. Applications du solide indéformable

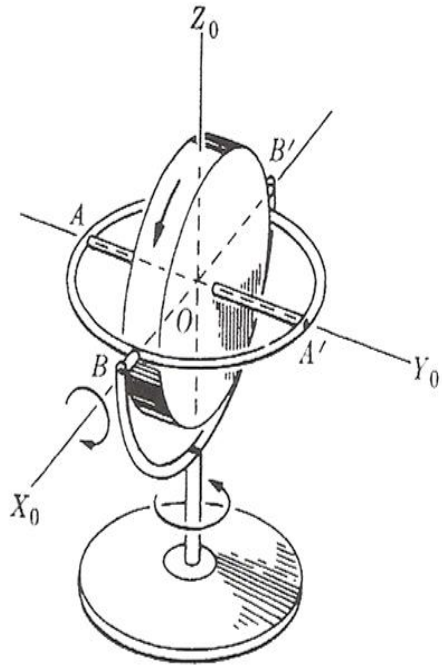
11.5. Stabilité gyroscopique



11.5. Stabilité gyroscopique



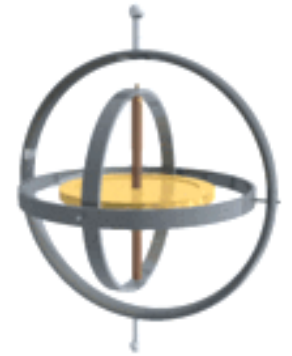
■ Le gyroscope



Principe : un disque tourne très vite autour d'un axe (OY_0). Celui-ci est mobile autour des axes OX_0 et OZ_0

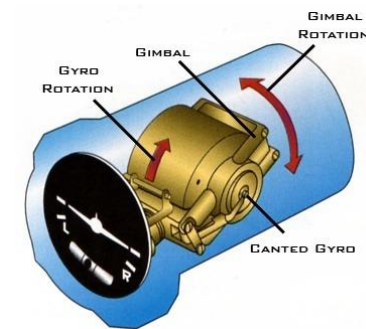
Observation : si l'on déplace le gyroscope, l'axe OY_0 est toujours dirigé dans la même direction

⇒ conséquence de la conservation du moment cinétique $\vec{L}$



Applications :

Les principales applications du gyroscope concernent le guidage (bateaux, avions, sous-marins) et l'horizon artificiel dans les avions

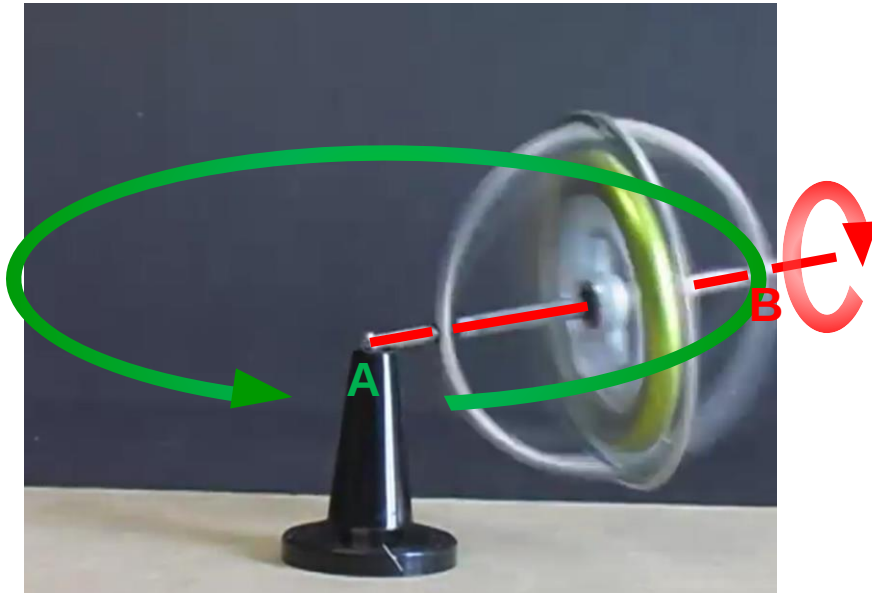




11.5. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

A) Description phénoménologique



Le disque du gyroscope est mis en rotation autour de son axe (en rouge) puis une des extrémités de cet axe est posée sur un support en A (on considère que les frottements sont négligeables en A).

Lorsque le gyroscope est lâché, l'axe de rotation du gyroscope se met à tourner autour du point A. L'extrémité B de l'axe de rotation décrit une trajectoire circulaire (courbe verte). C'est un mouvement de précession.

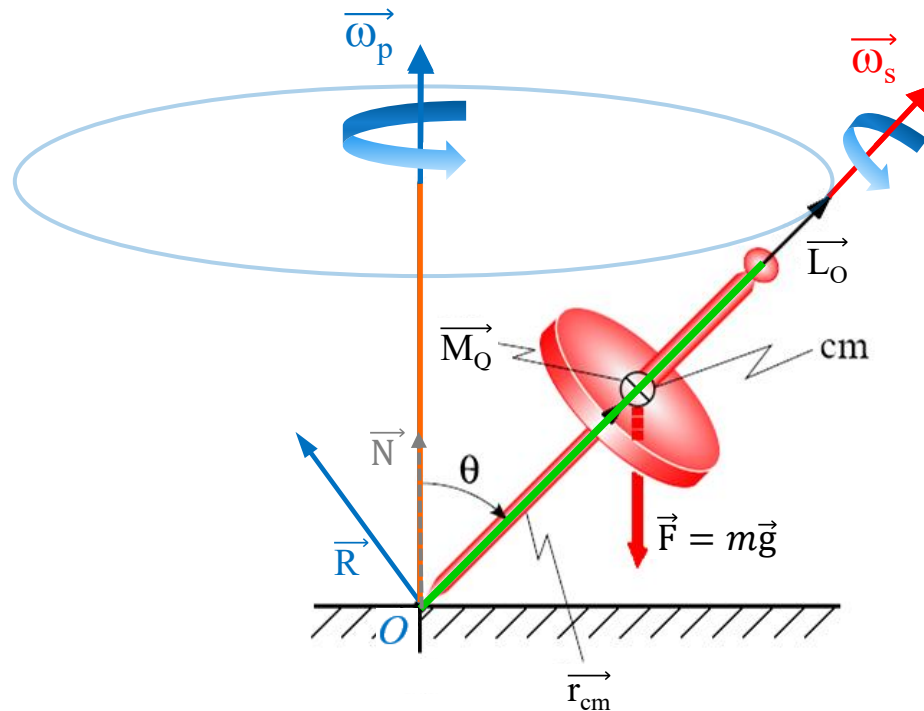
Remarque : si la rotation du disque du gyroscope est dans l'autre sens alors le point B suit la trajectoire verte dans le sens opposé



11.5. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

B) Analyse du mouvement



$\vec{\omega}_s$: vitesse angulaire de la roue tournant autour de son axe de rotation (en vert)

$\vec{\omega}_p$: vitesse angulaire de la rotation de l'axe de rotation du gyroscope autour de l'axe vertical (en orange). Ce mouvement de rotation de l'axe «vert» est appelé mouvement de précession.

$\vec{F}$: poids (force externe) dont le point d'application est le centre de masse cm

$\vec{R}$: réaction (force externe) au point de contact en O ($\vec{N}$ est la composante normale de la réaction)

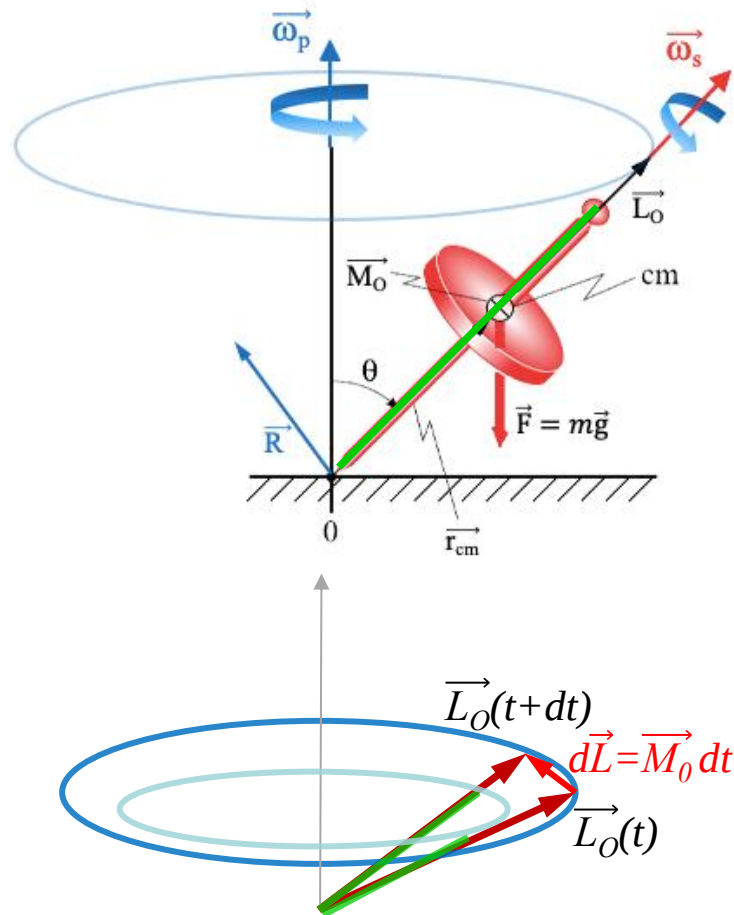
$\vec{M}_O$: moment des forces externes appliquées du gyroscope calculé au point de contact ($\vec{M}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}$)

$\vec{L}_O$: moment cinétique par rapport au point de contact ($\vec{L}_O = I \vec{\omega}_s$) avec I moment d'inertie

11.5. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

B) Analyse du mouvement



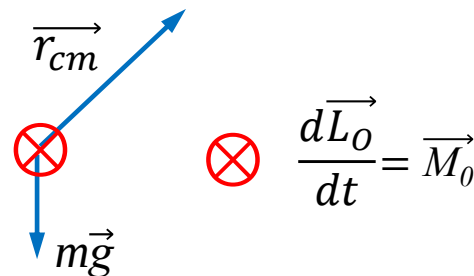
1) Mise en évidence du mouvement de précession

Théorème du moment cinétique :
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_{O,i} \times \vec{F}_{ext,i} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_{ext,i})$$

Remarque : pour $\vec{r}_{O,i}$ il faut prendre le vecteur entre le point par rapport auquel on définit le moment (et le moment cinétique) et le point d'application de la force. Dans le cas présent, c'est le vecteur $\vec{r}_{cm}$ pour le poids et un vecteur nul pour la réaction

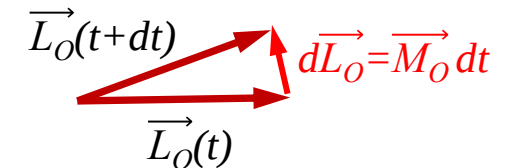
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} + \underbrace{\vec{0} \times \vec{R}}_{\vec{0}} = \vec{M}_0$$

Calcul du produit vectoriel $\vec{r}_{cm} \times m\vec{g}$



La direction du moment cinétique change selon $\vec{M}_0$

vue de dessus



Le moment cinétique change de direction : il effectue un mouvement de précession autour de l'axe vertical passant par O

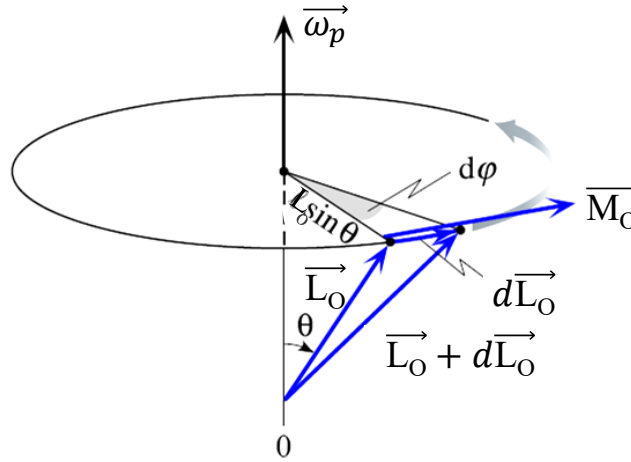
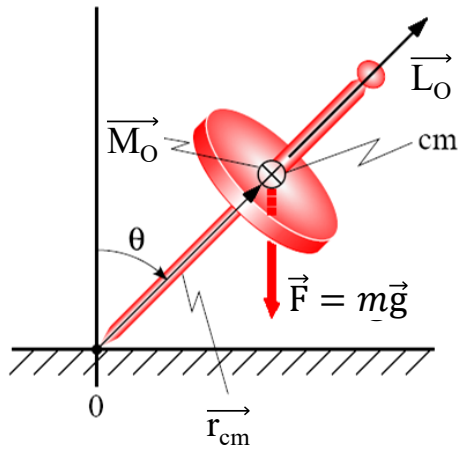


11.5. Stabilité gyroscopique



■ Etude de la stabilité gyroscopique

B) Analyse du mouvement



$$\tan d\varphi \approx d\varphi = \frac{dL_o}{L_o \sin \theta}$$

2) Calcul de la vitesse angulaire de précession ω_p

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{M}_o = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} \Rightarrow M_o = r_{cm} F \sin\theta$$

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL_o / L_o \sin\theta}{dt} = \frac{dL_o}{dt} \frac{1}{L_o \sin\theta} = \frac{M_o}{L_o \sin\theta}$$

$$= \frac{r_{cm} F \sin\theta}{L_o \sin\theta} = \frac{r_{cm} F}{I \omega_s} = \frac{r_{cm} m g}{I \omega_s}$$

11.5. Stabilité gyroscopique



■ Etude de la stabilité gyroscopique

C) Propriétés



Nous avons vu que l'axe de rotation du gyroscope présente un mouvement de précession avec une vitesse angulaire ω_p

Pour qu'un gyroscope soit utile, il faut que le mouvement de précession soit très lent, c'est à dire que ω_p soit très petit.

La vitesse angulaire de la précession est donnée par

$$\omega_p = \frac{r_{cm} m g}{I \omega_s}$$

Pour avoir ω_p très petit, il faut

r_{cm}	<i>petit</i>
I	<i>grand</i>
ω_s	<i>très élevée</i>

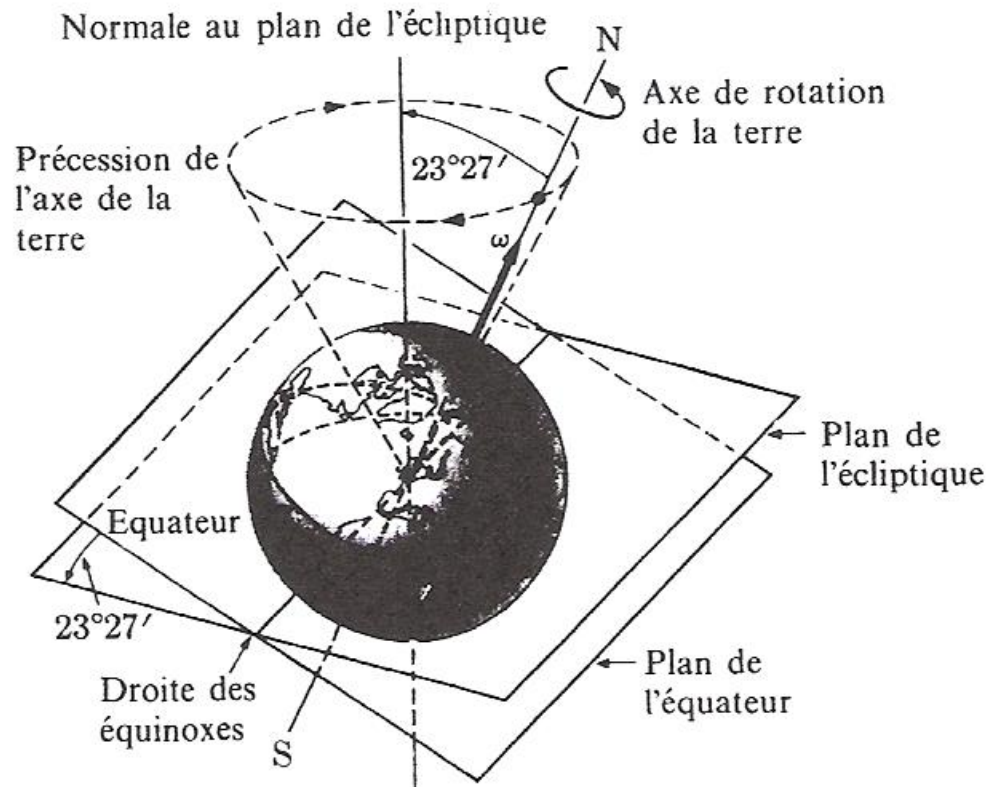
Compas gyroscopique dans les bateaux et avions:

$\omega_s = 6.000 \text{ à } 24.000 \text{ tours/min}$ et $\omega_p < 0.02^\circ/\text{jour}$

11.5. Stabilité gyroscopique



■ Un «gyroscope » géant : la Terre



Période ($2\pi/\omega_p$): 25 770 années

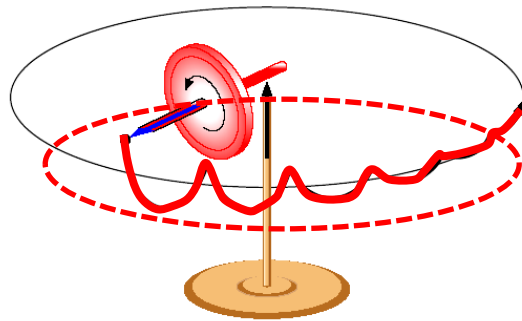
La précession de la Terre (ou " précession des équinoxes ") est semblable au phénomène observé pour le gyroscope. C'est un effet induit par les forces de gravitation du Soleil et de la Lune qui s'exercent sur la Terre.



11.5. Stabilité gyroscopique

■ Phénomène de nutation

Nous avons vu que lorsqu'on lâche un gyroscope dont l'axe de rotation repose sur une support, il se met à effectuer un mouvement de précession. Nous pouvons aussi observer de petites oscillations de l'extrémité de l'axe de rotation pendant le mouvement de précession. C'est le phénomène de nutation



à $t=0$ l'axe de rotation est maintenu à l'horizontale
 $\Rightarrow$ la projection de $\vec{L}$ sur Oz est nulle ($L_z = 0$)

Quand on lâche la roue, l'axe s'incline vers le bas
sous l'effet du poids $\Rightarrow L_z < 0$

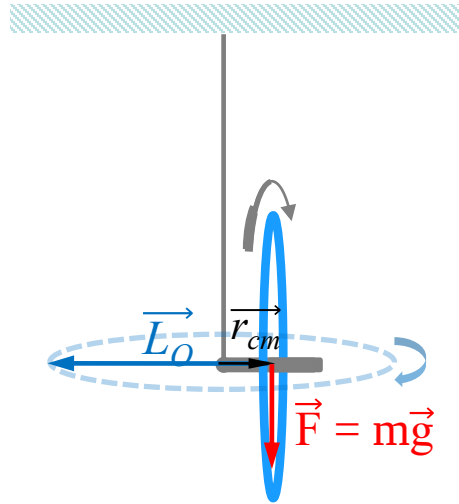
La conservation du moment cinétique impose une
composante verticale $L_p > 0$ telle que $L_z + L_p = 0$

$\Rightarrow$ Oscillation de l'axe autour de l'inclinaison initiale : c'est la nutation

11.5. Stabilité gyroscopique



■ Exemple 1 : roue de vélo attachée à un fil



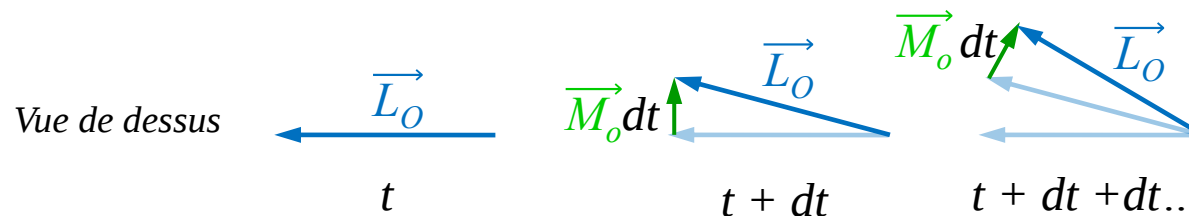
Le poids crée un moment de force sur l'axe de rotation. On définit $\vec{r}_{cm}$ entre le point d'attache et le centre de masse de la roue (qui est sur l'axe de rotation).

On peut appliquer le théorème du moment cinétique (on doit faire attention au sens de rotation de la roue pour bien orienter $\vec{L}_O$) :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

Le moment cinétique varie comme le moment de force.

A l'instant t , nous avons le moment cinétique $\vec{L}_O$. A l'instant $t + dt$, nous avons $\vec{L}_O + d\vec{L}_O$ avec $d\vec{L}_O = \vec{M}_O dt$. Le moment cinétique change donc de direction:



Le moment cinétique tourne. Comme $\vec{L}$ est selon l'axe de rotation de la roue, la roue tourne également.

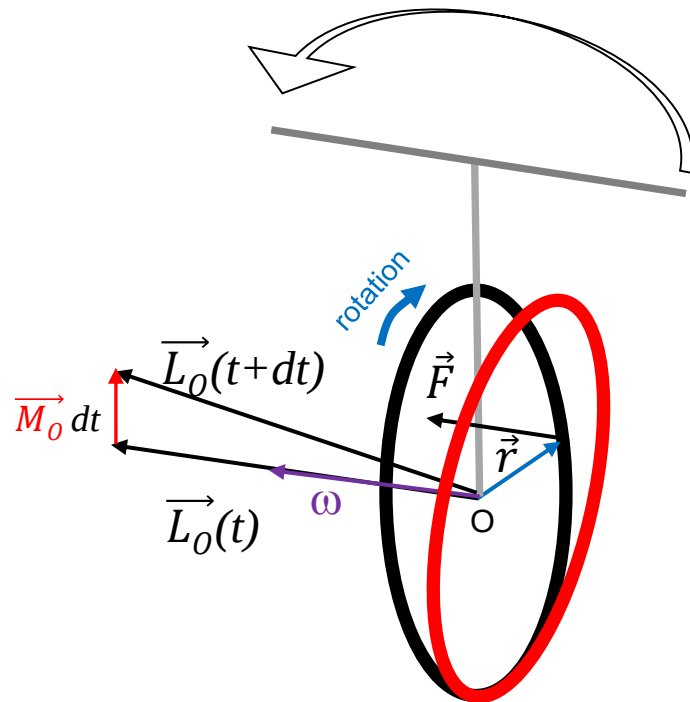
11.5. Stabilité gyroscopique



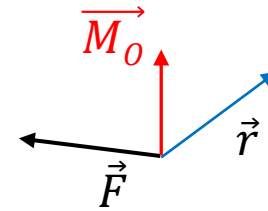
■ Exemple 2 : roue de vélo en rotation

Une roue de vélo est en rotation autour d'un axe relié à un guidon

Observation : la roue s'incline vers la droite quand on tourne le guidon vers la gauche



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\vec{L}_O(t+dt) = \vec{L}_O(t) + \vec{M}_O dt$$

⇒ La variation du moment cinétique est vers le haut, ce qui signifie que la roue s'incline vers la droite

11.5. Stabilité gyroscopique



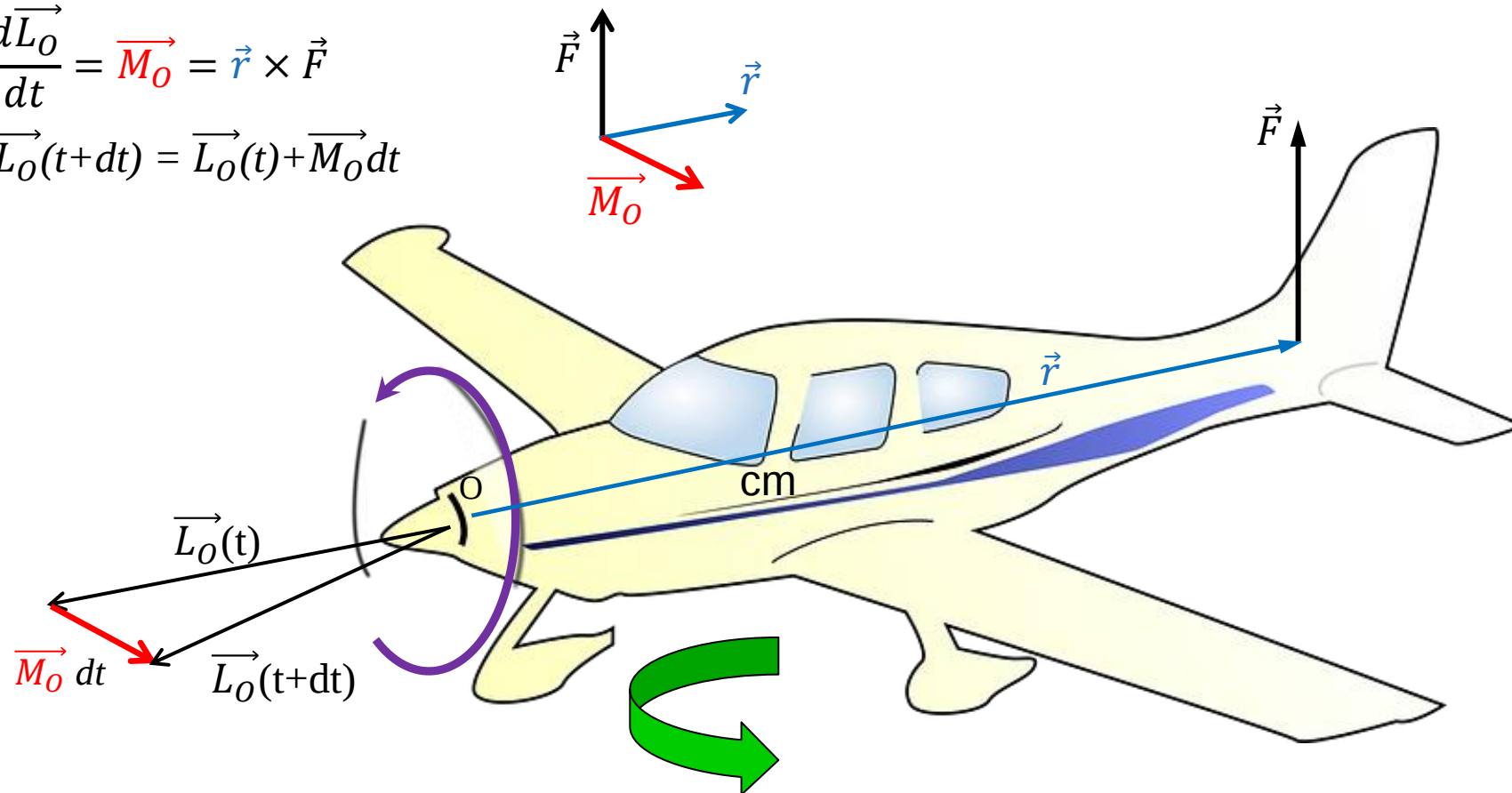
■ Exemple 3 : l'avion à hélice

Un avion à hélice que le pilote fait descendre. Vue du pilote, l'hélice tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (sens direct)

Observation : l'avion vire à gauche lorsque l'on veut descendre

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{L}_O(t+dt) = \vec{L}_O(t) + \vec{M}_O dt$$

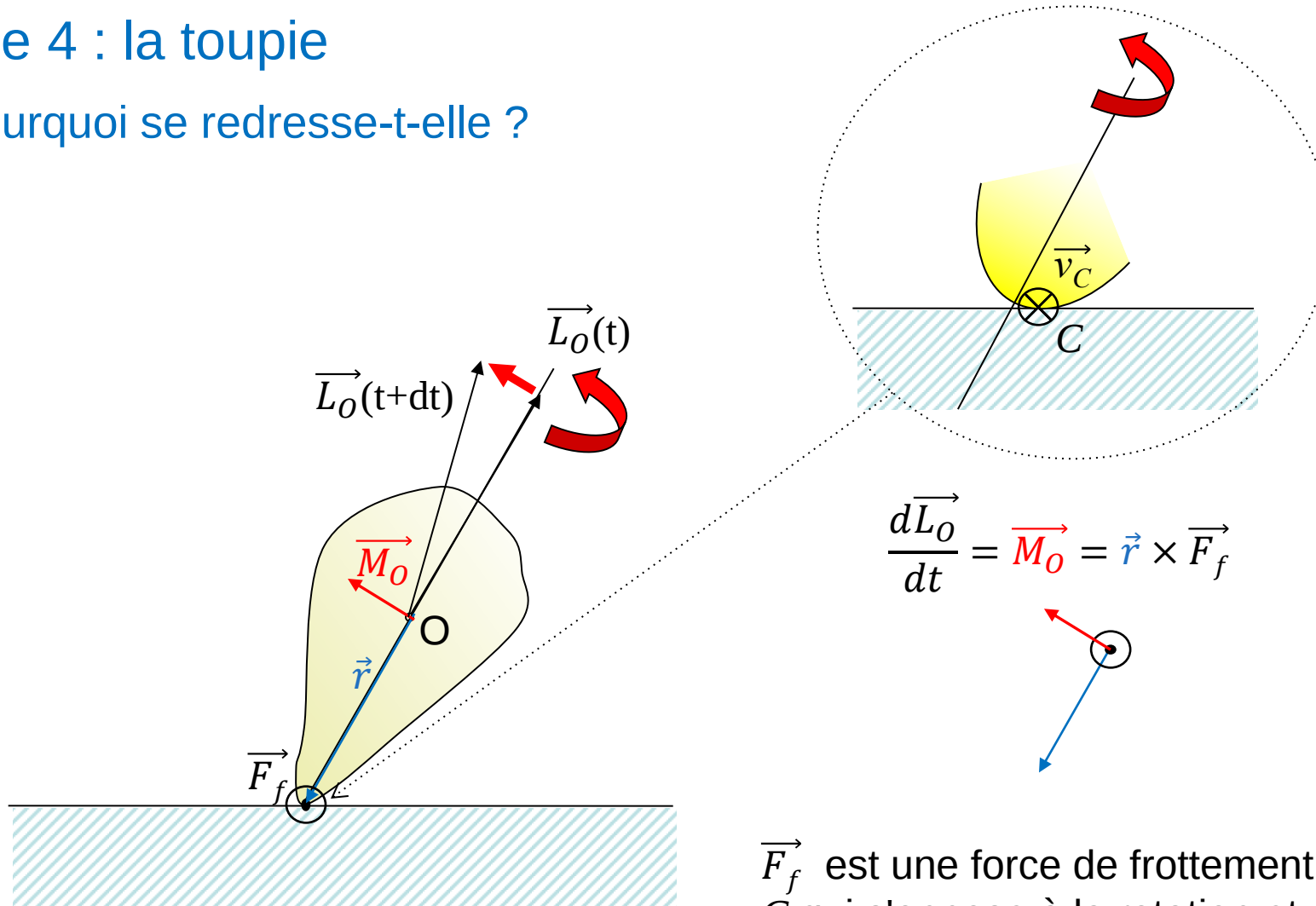


11.5. Stabilité gyroscopique



■ Exemple 4 : la toupie

Pourquoi se redresse-t-elle ?



$\vec{F}_f$ est une force de frottement au point de contact C qui s'oppose à la rotation et qui crée un moment responsable du redressement de la toupie

11.5. Stabilité gyroscopique



■ Applications

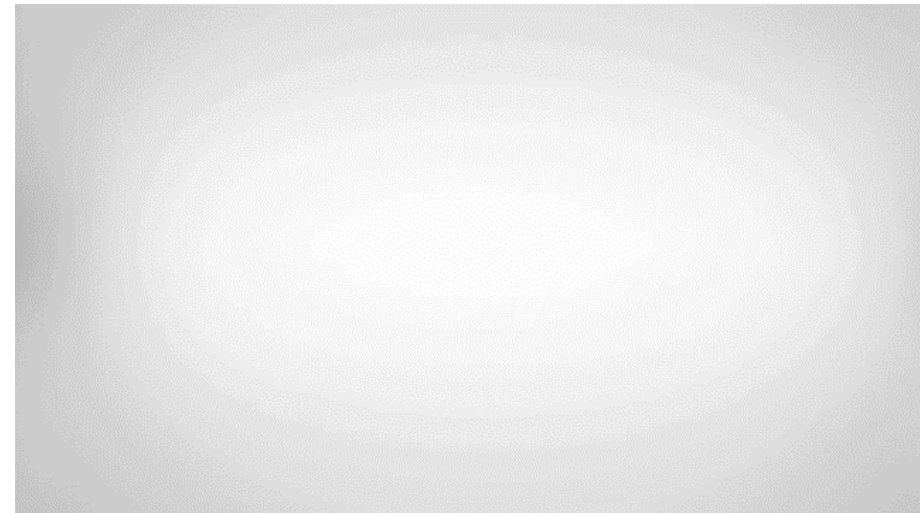
The Cubli

Building a cube that can jump up and balance



ETH zürich

ETH zürich

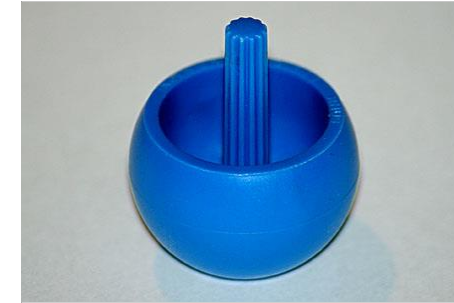
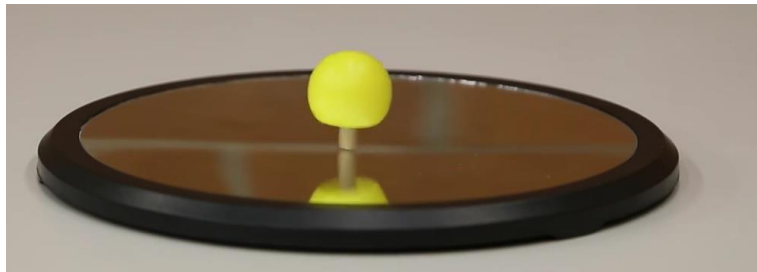
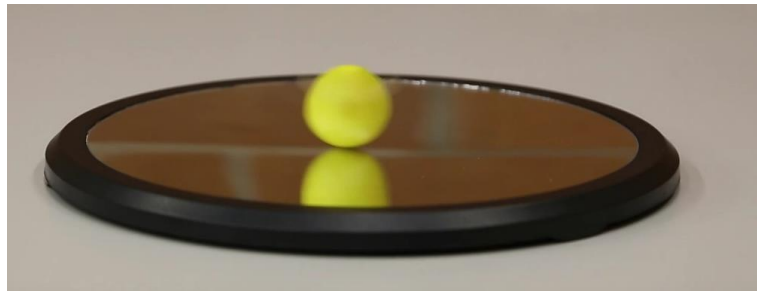
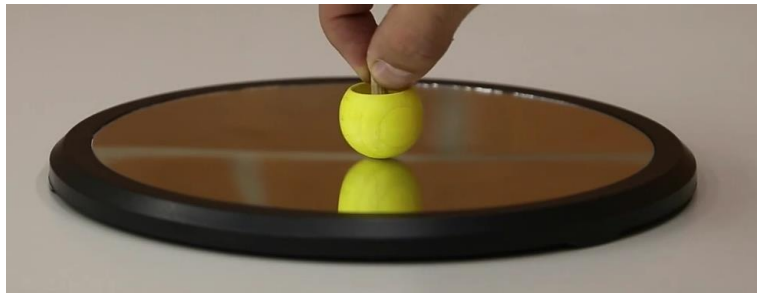


11.5. Stabilité gyroscopique



■ Information scientifique : La toupie « inversée »

La répartition des masses, la rotation, et les forces de frottements peuvent entraîner des phénomènes étonnants



Les Prix Nobel Wolfgang Pauli and Niels Bohr jouant avec une de ces toupies lors de l'ouverture du nouvel Institut de Physique de Lund en Suède le 31 mai 1951

Credit: Erik Gustafson, courtoisie de AIP Emilio Segre Visual Archives, Margrethe Bohr Collection <http://photos.aip.org>